

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών απόδειξη παράγρ. 1.8 σχολικό βιβλίο
- A2.** Ορισμός παράγρ. 2.2 σχολικό βιβλίο
- A3.** (Λ) πχ  $f(x) = x^3 \mid \mathbb{R}$  *f γνησίως αύξουσα*  $\mid \mathbb{R}$  αλλά  $f'(x) = 3x^2 \geq 0$  στο  $\mathbb{R}$ .
- A4.** α)  $\rightarrow \Lambda$ , β)  $\rightarrow \Sigma$ , γ)  $\rightarrow \Sigma$ , δ)  $\rightarrow \Sigma$ , ε)  $\rightarrow \Sigma$ ,

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**  $A_f = (1, +\infty)$   $A_g = \mathbb{R}$

Η  $f \circ g$  ορίζεται στο σύνολο

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ ώστε } g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ ώστε } e^x > 1\} = (0, +\infty).$$

Οπότε  $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ ,  $x > 0$ .

**B2.** Έστω  $x_1, x_2 \in (0, +\infty) : (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow \frac{e^{x_1} + 2}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 2}{e^{x_2} - 1} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (e^{x_1} + 2)(e^{x_2} - 1) = (e^{x_2} + 2)(e^{x_1} - 1) \Rightarrow e^{x_1 x_2} - e^{x_1} + 2e^{x_2} - 2 = e^{x_1 x_2} - e^{x_2} + 2e^{x_1} - 2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 3e^{x_1} = 3e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$

Οπότε  $f \circ g$  είναι 1-1 άρα υπάρχει η

$$(f \circ g)^{-1} : (f \circ g)((0, +\infty)) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } y = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow (y-1)e^x = y+2 \quad (1)$$

$$\text{Αν } y=1 \quad \eta(1) \Leftrightarrow 0e^x = 3 \text{ αδύνατη, άρα } 1 \notin (f \circ g)((0, +\infty))$$

$$\bullet \text{Αν } y \neq 1 \quad \eta(1) \Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1}.$$

$$\text{Πρέπει } \frac{y+2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y < -2 \quad \eta \quad y > 1 \quad (2)$$

και

$$x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) \text{ αλλά } x > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1 \quad (3)$$

Από (4), (3) τελικά  $y > 1$

$$\text{Έτσι: } \varphi(x) = (f \circ g)^{-1} = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), \quad x > 1$$

$$\mathbf{B3.} \quad \text{Για } x > 1: \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \left( \frac{x+2}{x-1} \right)' = \frac{x-1}{x+2} \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)^2} < 0$$

Άρα  $\varphi$  γνησίως φθίνουσα στο  $(1, +\infty)$ .

$$\mathbf{B4.} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \stackrel{\substack{x+2=u \\ x-1=u}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \stackrel{\substack{x+2=u \\ x-1=u}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \ln 1 = 0.$$

ή για το (B2) μελετάμε τη μονοτονία της  $f \circ g$  μέσω παραγώγου και σύνολο τιμών της με όρια.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1** Η  $f$  συνεχής στο  $(-\infty, 0)$  ως πράξεις μεταξύ συνεχών.

Η  $f$  συνεχής στο  $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  ομοίως ως πράξεις μεταξύ συνεχών.

Αφού είναι συνεχής η  $f$  πρέπει να είναι συνεχής και στο  $x_0 = 0$ .

Άρα πρέπει :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{1-x} - \ln \lambda \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x) = 1 - \ln \lambda \Leftrightarrow 1 - \ln \lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda = 1 - \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda + \lambda - 1 = 0. \quad (1)$$

Θεωρώ  $\varphi(x) = \ln x + x - 1$ ,  $x > 0$  με  $\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow \varphi$  γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ . Από (1) είναι  $\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda) = \varphi(1) \Leftrightarrow \lambda = 1$ .

**Γ2** Είναι  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Για  $x < 0$ :  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \frac{1 - 1 + x}{x(1-x)} = \frac{1}{1-x}$

Επίσης  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$

Για  $x > 0$ :  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x - 1}{x} = \frac{\eta \mu x}{x} + \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x}$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\eta \mu x}{x} + \frac{\sigma \upsilon \nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1$ , άρα  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$

Επομένως  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$

Άρα η εφαπτόμενη στο  $A(0,1)$  έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y = x + 1$$

Αν  $\omega$  η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη με τον άξονα  $xx'$  είναι:

$$\varepsilon \varphi \omega = f'(0) \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \quad (\omega \in [0, \pi))..$$

**Γ3.** Για  $x < 0$ :  $f'(x) = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{-(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Για  $x > 0$ ;  $f'(x) = (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)' = \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x$

Άρα  $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x \leq 0 \\ \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x, & x > 0 \end{cases}$

Για  $x \leq 0$  είναι  $f'(x) > 0$ .

Για  $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ :  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sin x$

$$\stackrel{\sin x \neq 0}{\Leftrightarrow} \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4} \text{ αφού } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Επειδή λοιπόν η  $f'$  ορίζεται στο  $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$  και  $f'(x) = 0$  στα  $x = \frac{\pi}{4}$  και  $x = \frac{5\pi}{4}$  αυτά είναι και τα κρίσιμα σημεία.

**Γ4.** Η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $M(a, f(a))$  είναι  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ .

$$\text{Για } y = 0 \Rightarrow -f(a) = f'(a)x - af'(a) \Leftrightarrow x = \frac{af'(a) - f(a)}{f'(a)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα  $x'x$  είναι

$$B\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$$

$$\text{Επομένως } x_B = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - \frac{1}{\frac{1-a}{1}} = a - (1-a) = 2a - 1.$$

Άρα την οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t$  είναι:

$$x_B(t) = 2a(t) - 1 \Rightarrow x'_B(t) = 2a'(t) \Rightarrow x'_B(t) = 2\left(-\frac{a(t)}{3}\right) \Rightarrow x'_B(t) = -\frac{2}{3}a(t) \quad (1)$$

Όμως ισχύει  $a(t_0) = -1$

Από (1) για  $t = t_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}a(t_0) \Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}(-1) \Rightarrow x'_B(t_0) = \frac{2}{3} \quad \frac{\text{μονάδα μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Είναι:

$$f'(x) = e^x + 2x - e \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = e^x + 2 \quad x \in \mathbb{R}$$

$f''(x) > 0$  στο  $\mathbb{R}$  άρα  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

Η  $f'$  στο  $[0, 1]$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano αφού

$$f'(0) = 1 - e < 0$$

$$f'(1) = 2 > 0$$

Άρα υπάρχει  $x_0 \in (0, 1)$ :  $f'(x_0) = 0$

Το παραπάνω είναι μοναδικό στο  $\mathbb{R}$  αφού  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Έτσι

$$x < x_0 \stackrel{f' \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$$

$$x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$x_0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$					

Έχουμε:

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1 \quad (1)$$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \quad (2)$$

$$\text{Η (1)} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

**Δ2.** Από (Δ1) για  $x \neq x_0$  είναι  $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$  λόγω συνέχειας της  $f$  στο  $x_0$ .

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty \quad (3)$$

Ακόμη για  $x \neq x_0$  είναι:

$$\eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \quad (4)$$

$$\text{Από (3)} \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + 1 \right) = +\infty$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right] = +\infty$$

**Δ3** Έστω  $\varphi(x) = f(x) + x - x_0$ ,  $x \in [x_0, 1]$

Η  $\varphi$  είναι συνεχής στο  $[x_0, 1]$  ως άθροισμα συνεχών.

- $\varphi(x_0) = f(x_0)$

$$\text{Όμως } x_0 < 1 \stackrel{(\Delta_1)}{\Rightarrow} f(x_0) < f(1) = 0 \Rightarrow \varphi(x_0) < 0$$

- $\varphi(1) = f(1) + 1 - x_0 > 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει  $\rho \in (x_0, 1)$

Ωστε:  $\varphi(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) + \rho - x_0 = 0$

Η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική στο  $[x_0, 1]$

Αφού  $\varphi'(x) = f'(x) + 1 > 0$  στο  $[x_0, 1]$

$\Rightarrow \varphi$  γνησίως αύξουσα στο  $[x_0, 1]$ .

**Δ4.** Είναι  $f(\rho) + \rho = x_0$  με  $\rho \in (x_0, 1)$  και  $x_0 \in (0, 1)$

Έχουμε για  $\kappa \in (\rho, 1)$ :

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow f(x_0) - f(\rho) > f(\rho)f'(\kappa)$$

$$\Leftrightarrow \underset{x_0 < \rho}{\frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}} < f'(\kappa) \quad (5)$$

Η  $f$  στο  $[x_0, \rho]$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει  $\xi \in (x_0, \rho)$ :

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} \quad (6)$$

Η (5)  $\Leftrightarrow f'(\xi) < f'(\kappa)$

Ισχύει αφού  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και  $\xi < \rho, \kappa \in (\rho, 1)$

**Δ4. 2ος τρόπος λύσης**

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow f(x_0) > f(\rho)f'(\kappa) - f(\rho) \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) - f(\rho)f'(\kappa) - f(\rho) > 0$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x_0) - f(\rho)f'(x) - f(\rho) \quad \text{με } x \in [\rho, 1]$$

είναι  $\varphi(x) > 0$ .

Στο  $[x_0, \rho]$  από ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (x_0, \rho): f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} \Leftrightarrow f(x_0) - f(\rho) = f'(\xi)(x_0 - \rho).$$

Από το Δ3, είναι

$$f(\rho) + \rho = x_0 \Leftrightarrow f(\rho) = x_0 - \rho < 0.$$

$$\text{Άρα } \varphi(x) = f'(\xi)(x_0 - \rho) - (x_0 - \rho)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = (x_0 - \rho)(f'(\xi) - f'(x))$$

Είναι

$$\varphi'(x) = (x_0 - \rho)(-f''(x)) > 0, \quad \text{αφού } x_0 - \rho < 0$$

και  $f''(x) > 0 \Rightarrow \varphi$  γνησίως αύξουσα στο  $[\rho, 1]$ .

Άρα  $\rho < x < 1 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(\rho) = (x_0 - \rho)(f'(\xi) - f'(\rho)) \quad (1)$

Αφού  $\xi < \rho \stackrel{f'' > 0}{\underset{f' \uparrow}{\Rightarrow}} f'(\xi) < f'(\rho) \Rightarrow f'(\xi) - f'(\rho) < 0$

και  $x_0 - \rho < 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \varphi(x) > \varphi(\rho) > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0.$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΟΡΟΣΗΜΟ  
ΙΕΡΑΓΓΕΤΡΑ