ιδιαίτερον
μαθήματα μέσης εκπαίδευσης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΠΑΛ

04/06/2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 28-29

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 87

Α3. α. Λάθος (σχ. βιβλίο σελ. 96)
β. Σωστό (σχ. βιβλίο σελ. 40)
γ. Λάθος (σχ. βιβλίο σελ. 86-87)

Α4. α. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \neq 0$

β. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\bar{x} = \frac{25+10+5+20+15}{5} = \frac{75}{5} = 15$ Εύρος: $R = 25-5 = 20$

Β2. $s^2 = \frac{(5-15)^2+(10-15)^2+(15-15)^2+(20-15)^2+(25-15)^2}{5}$

$= \frac{100+25+0+25+100}{5} = \frac{250}{5} = 50$

Β3. $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{\sqrt{50}}{15} = \frac{\sqrt{25\cdot 2}}{15} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} \simeq 0,47$

Αφού $CV > \frac{10}{100}$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = x^3 - 9x^2 + \alpha x + 1$, $x, \alpha \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική

$f'(x) = 3x^2 - 18x + \alpha$

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow -15 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 15$

Γ2. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

$f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 1 = 8 - 36 + 30 + 1 = 3$

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 18 \cdot 2 + 15 = 3 \cdot 4 - 36 + 15 = 27 - 36 = -9$

Η εφαπτομένη είναι στη μορφή $y = \lambda x + \beta$ με $\lambda = f'(2) = -9$

δηλ. $y = -9x + \beta$.

Το σημείο $A(2, f(2)) \rightarrow A(2,3)$ ανήκει στην ευθεία,

άρα οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν:

Δηλ. $3 = -9 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow 3 = -18 + \beta \Leftrightarrow \beta = 21$

Οπότε, η ευθεία είναι: $y = -9x + 21$

Γ3. $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18 \cdot x + 15 = 0$

$\Delta = 144$

$x_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Αφού $f'(x)>0$ στο $(-\infty,1)$ και στο $(5,+\infty)$, η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και στο $[5,+\infty)$

Αφού $f'(x)<0$ στο $(1,5)$, η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,5]$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=1$ το $f(1)=1^3-9\cdot 1^2+15\cdot 1+1$
$\Leftrightarrow f(1)=1-9+15+1 \Leftrightarrow f(1)=8$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=5$ το
$f(5)=5^3-9\cdot 5^2+15\cdot 5+1=125-225+75+1=201-225=-24$

Γ4. $$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-18x+15}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(x-5)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot(x-5)}{x+1}=\frac{3\cdot(1-5)}{1+1}=\frac{3\cdot(-4)}{2}=-\frac{12}{2}=-6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Για να ορίζεται η $f(x)$ πρέπει ο παρονομαστής να μην μηδενίζεται. Άρα, $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Οπότε, το πεδίο ορισμού είναι $A = \mathbb{R} - \{-1\}$

Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο Α, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{(x)'\cdot(x+1) - x\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

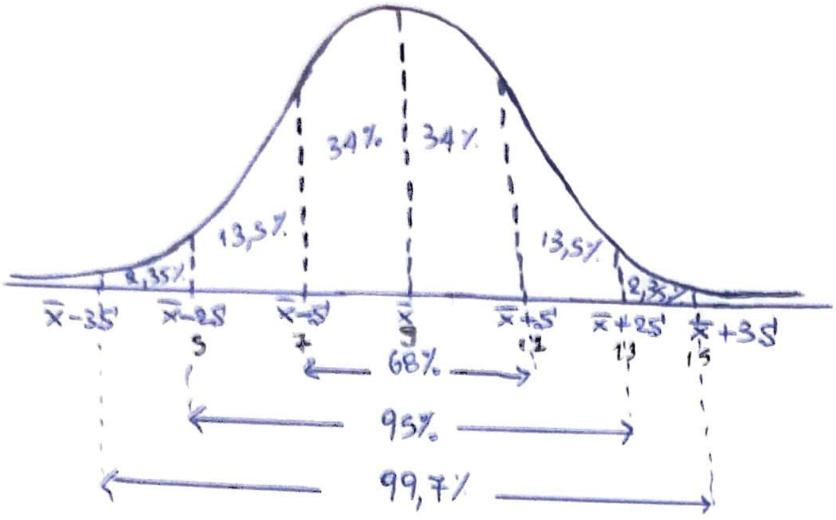
Δ2. $f'(2) = \dfrac{1}{(2+1)^2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

$f'(1) = \dfrac{1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

Επομένως, $\overline{x} = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{\frac{1}{9}} = 9$

$S = \dfrac{1}{2\cdot f'(1)} = \dfrac{1}{2\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\frac{2}{4}} = 2$

Δ3.



$\bar{x}=9 \quad , \quad s'=2$

$\bar{x}-s'=9-2=7 \qquad \bar{x}+s'=9+2=11$

$\bar{x}-2s'=5 \qquad \bar{x}+2s'=13$

$\bar{x}-3s'=3 \qquad \bar{x}+3s'=15$

Σύμφωνα με τους τύπους στην κανονική κατανομή, περίπου

- Το 68% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x}-s', \bar{x}+s')$
- Το 95% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x}-2s', \bar{x}+2s')$
- Στο διάστημα $(\bar{x}-2s', \bar{x}-s')$ είναι το 13,5% των παρατηρήσεων.

Οπότε στο διάστημα $(\bar{x}-2s', \bar{x}+s') \to (5, 11)$ βρίσκονται το 81,5% των μαθητών.

Δηλαδή, $\frac{81,5}{100}\cdot 2000 = 81,5\cdot 20 = 1630$ μαθητές

Παίνω από 15 λεπτά $(15=\bar{x}+3s')$, βρίσκονται το 0,15% των μαθητών. Άρα $\frac{0,15}{100}\cdot 2000 = 0,15\cdot 20 = 3$ μαθητές

Δ4. $\bar{y}=\bar{x}+3=9+3=12$ λεπτά.

$s_y=s_x=2$ λεπτά